Espaces normés

Normes

Exercice 1 [00454] [Correction]
Soient N_1, N_2 deux normes sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.
a) On note $B_1 = \{x \in E / N_1(x) \leqslant 1\}$ et $B_2 = \{x \in E / N_2(x) \leqslant 1\}$.
Montrer

$$B_1 = B_2 \Rightarrow N_1 = N_2$$

b) Même question avec les boules unités ouvertes.

Exercice 2 [02639] [Correction]
On définit sur $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ une norme par

$$N(f) = \int_0^1 |f(t)| \,\mathrm{d}t$$

a) Soient $a, b \geqslant 0$ et $u, v > 0$. Etablir que

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \Rightarrow \frac{1}{u+v} \leqslant \frac{a}{u} + \frac{b}{v}$$

b) Soient $f, g \in E$ telles que $f, g > 0$. Montrer

$$N((f+g)^{-1}) \leqslant \frac{N(f)^2 N(f^{-1}) + N(g)^2 N(g^{-1})}{(N(f) + N(g))^2}$$

c) En déduire que

$$N(f+g) N((f+g)^{-1}) \leqslant \max(N(f)N(f^{-1}), N(g)N(g^{-1}))$$

Exercice 3 [02766] [Correction]
Soit $(E, \|\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
a) Montrer que pour tous $x, y \in E$

$$\|x\| + \|y\| \leqslant 2 \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$$

b) Montrer que l'on peut avoir l'égalité avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$.
Désormais la norme est euclidienne.
c) Montrer que pour tous $x, y \in E$

$$\|x\| + \|y\| \leqslant \sqrt{2} \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$$

d) Peut-on améliorer la constante $\sqrt{2}$?

Exercice 4 [00795] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Existe-t-il une norme $\|\,.\,\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ invariante par conjugaison, c'est-à-dire telle que :

$$\forall (A, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \|A\| = \left\|P^{-1}AP\right\|$$

Etude de normes

Exercice 5 [00457] [Correction]
Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On pose

$$\|A\|_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|,\ \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|^2} \text{ et } \|A\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p} |a_{i,j}|$$

Montrer que $\|\,.\,\|_1$, $\|\,.\,\|_2$ et $\|\,.\,\|_\infty$ définissent des normes sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exercice 6 [00459] [Correction]
Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on pose

$$\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^2\right)^{1/2}$$

Montrer que $\|\,.\,\|$ est une norme matricielle i.e. que c'est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|AB\| \leqslant \|A\| \|B\|$$

Exercice 7 [03625] [Correction]
Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\|A\| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$$

a) Montrer que $\|\,.\,\|$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
b) Vérifier

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \|AB\| \leqslant \|A\| \|B\|$$

Exercice 8 [00460] [Correction]
Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\|A\| = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$

a) Montrer que $\|\,.\,\|$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
b) Montrer que si λ est valeur propre de A alors $|\lambda| \leqslant \|A\|$.

Exercice 9 [00461] [Correction]
Soient $p > 1$ et $q > 1$ tel que $1/p + 1/q = 1$.
a) Montrer que pour $a, b \geqslant 0$

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \text{ et } \|y\|_q = \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}$$

b) Soit $x$et y dans $\mathbb{K}^n$ non nuls. Établir

$$\frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leqslant \frac{1}{p}\frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}$$

et en déduire

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q$$

c) En écrivant

$$(|x_i| + |y_i|)^p = |x_i| (|x_i| + |y_i|)^{p-1} + |y_i| (|x_i| + |y_i|)^{p-1}$$

justifier

$$\|x + y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$$

d) Conclure que $\|\,.\,\|_p$ définit une norme sur $\mathbb{K}^n$.

Exercice 10 [00462] [Correction]
Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $p \geqslant 1$ on pose

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

Montrer

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to+\infty} \|x\|_p$$

Exercice 11 [03248] [Correction]
Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels et $N : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$N(x_1, \dots, x_n) = a_1 |x_1| + \dots + a_n |x_n|$$

A quelle condition sur les $a_1, \dots, a_n$, l'application N définit-elle une norme sur $\mathbb{K}^n$?

Exercice 12 [00456] [Correction]
Soient $f_1, \dots, f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continues.
A quelle condition l'application

$$N : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \|x_1 f_1 + \dots + x_n f_n\|_\infty$$

définit-elle une norme sur $\mathbb{R}^n$?

Exercice 13 [00455] [Correction]
Montrer que l'application $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$N(x_1, x_2) = \sup_{t\in[0,1]} |x_1 + t x_2|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
Représenter la boule unité fermée pour cette norme et comparer celle-ci à $\|\,.\,\|_\infty$.

Exercice 14 [03905] [Correction]
On note $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ l'ensemble des suites $u = (u_n) \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ sommable i.e.

$$\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \left\{u \in \mathbb{K}^\mathbb{N} / \sum |u_n| < +\infty\right\}$$

Montrer que $\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et que l'application donnée par

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

y définit une norme

Exercice 15 [03903] [Correction]
Soit I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$. On note $L^1(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $f : I \to \mathbb{K}$ continues et intégrables i.e.

$$L^1(I,\mathbb{K}) = \left\{ f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K}) / \int_I |f| < +\infty \right\}$$

Montrer que $L^1(I,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et que

$$\|f\|_1 = \int_I |f(t)| \,\mathrm{d}t$$

y définit une norme.

Exercice 16 [03904] [Correction]
Soit I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$. On note $L^2(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $f : I \to \mathbb{K}$ continue et de carré intégrable i.e.

$$L^2(I,\mathbb{K}) = \left\{ f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K}) / \int_I |f|^2 < +\infty \right\}$$

Montrer que $L^2(I,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et que

$$\|f\|_2 = \left(\int_I |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t \right)^{1/2}$$

y définit une norme.

Exercice 17 [03906] [Correction]
On note $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ l'ensemble des suites $u = (u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de carré sommable i.e.

$$\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K}) = \left\{ u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} / \sum |u_n|^2 < +\infty \right\}$$

Montrer que $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et que l'application donnée par

$$\|u\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 \right)^{1/2}$$

y définit une norme.

Exercice 18 [04096] [Correction]
On introduit une norme $\|\,.\,\|$ sur l'espace des colonnes $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ en posant

Non défin

et note S l'ensemble formé des colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de norme égale à 1.
a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'existence de

$$\sup_{X \in S} \|AX\|$$

b) On pose

$$N(A) = \sup_{X \in S} \|AX\|$$

Justifier que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|AX\| \leqslant N(A)\,\|X\|$.
c) Vérifier que N définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
d) Montrer

$$N(A) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$

Distance

Exercice 19 [03272] [Correction]
On norme l'espace $\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ des suites bornées par la norme infinie notée $\|\,.\,\|_\infty$.
Déterminer la distance de la suite e constante égale à 1 au sous-espace vectoriel $\mathcal{C}_0$ des suites réelles convergeant vers 0.

Exercice 20 [03273] [Correction]
On norme l'espace $\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ des suites bornées par la norme infini notée $\|\,.\,\|_\infty$.
Déterminer la distance de la suite $u = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ au sous-espace vectoriel $\mathcal{C}$ des suites réelles convergentes.

Exercice 21 [00470] [Correction]
On norme l'espace $\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ des suites bornées par la norme infini notée $\|\,.\,\|_\infty$.
Pour $x \in \mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$, on note Δx la suite de terme général

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

puis on forme $F = \{\Delta x / x \in \mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})\}$.
Déterminer la distance de la suite e constante égale à 1 au sous-espace vectoriel F.

Exercice 22 [03463] [Correction]
Soit E l'espace des fonctions bornées de $[-1,1]$ vers $\mathbb{R}$ normé par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$$

Déterminer la distance de la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left]0,1\right] \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x \in \left[-1,0\right[\end{cases}$$

au sous-espace vectoriel F de E formé des fonctions continues de $[-1,1]$ vers $\mathbb{R}$.

Comparaison de normes

Exercice 23 [00466] [Correction]
Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On définit les normes $\|\,.\,\|_1$, $\|\,.\,\|_2$ et $\|\,.\,\|_\infty$ par :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t,\ \|f\|_2 = \left(\int_0^1 f(t)^2\mathrm{d}t\right)^{1/2} \text{ et } \|f\|_\infty = \sup_{[0,1]}|f|$$

a) Montrer que $\|\,.\,\|_\infty$ est plus fine que $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_2$ mais qu'elle n'équivaut ni à l'une, ni à l'autre.
b) Comparer $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_2$.

Exercice 24 [00467] [Correction]
Soit $E = \mathcal{C}^1([-1,1],\mathbb{R})$. On définit N_1, N_2 et N_3 par

$$N_1(f) = \sup_{[-1,1]} |f|\,, N_2(f) = |f(0)| + \sup_{[-1,1]} |f'| \text{ et } N_3(f) = \int_{-1}^1 |f|$$

a) Montrer que N_1, N_2 et N_3 sont des normes sur E.
b) Comparer N_1 et N_2 d'une part, N_1 et N_3 d'autre part.

Exercice 25 [02412] [Correction]
Soient l'espace $E = \left\{f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}) / f(0) = 0\right\}$ et N l'application définie sur E par

$$N(f) = N_\infty(3f + f')$$

a) Montrer que (E,N) est un espace vectoriel normé puis qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $N_\infty(f) \leqslant \alpha N(f)$.
b) Les normes N_∞ et N sont-elles équivalentes ?

Exercice 26 [00465] [Correction]
Soient $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$ et $N : E \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$N(f) = \sqrt{f^2(0) + \int_0^1 f'^2(t)\mathrm{d}t}$$

a) Montrer que N définit une norme sur E.
b) Comparer N et $\|\,.\,\|_\infty$.

Exercice 27 [00473] [Correction]
Sur $\mathbb{R}[X]$ on définit N_1 et N_2 par :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|$$

a) Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur $\mathbb{R}[X]$.
b) Etudier la convergence pour l'une et l'autre norme de la suite de terme général

$$P_n = \frac{1}{n}X^n$$

c) Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Exercice 28 [00468] [Correction]
On note $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.
On définit des normes $\|\,.\,\|_1$, $\|\,.\,\|_2$ et $\|\,.\,\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ en posant

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|,\ \|u\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2\right)^{1/2} \text{ et } \|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

a) Comparer $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_\infty$.
b) Comparer $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_2$.

Exercice 29 [00469] [Correction]
On note $\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$ l'espace des suites réelles sommables. Cet espace est normé par

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

a) Soit $u \in \ell^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$. Montrer que u est bornée.
Cela permet d'introduire la norme $\|\,.\,\|_\infty$ définie par

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

Comparer $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_\infty$.
b) Soit $u \in \ell^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$. Montrer que u est de carré sommable
Cela permet d'introduire la norme $\|\,.\,\|_2$ définie par

$$\|u\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2\right)^{1/2}$$

Comparer $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_2$.

Exercice 30 [03265] [Correction]
On note $\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ l'espace des suites réelles bornées normé par $\|\,.\,\|_\infty$.
a) Soit $a = (a_n)$ une suite réelle. Former une condition nécessaire et suffisante sur la suite a pour que l'application

$$N_a : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n |x_n|$$

définit une norme sur $\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$.
b) Comparer N_a et $\|\,.\,\|_\infty$.

Exercice 31 [00039] [Correction]
a) Montrer que

$$N_\infty(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \text{ et } N(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$$

définissent des normes sur l'espace E des suites réelles bornées $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_0 = 0$.
b) Montrer que

$$\forall u \in E, N(u) \leqslant 2N_\infty(u)$$

Déterminer une suite non nulle telle qu'il y ait égalité.
c) Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Comparaison de normes équivalentes

Exercice 32 [00463] [Correction]
On note $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.
a) Pour $f \in E$, on pose

$$N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$$

Montrer que N est une norme sur E.
b) Pour $f \in E$, on pose

$$N'(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

On vérifie aisément que N' est une norme sur E. Montrer qu'elle est équivalente à N.
c) Les normes N et N' sont elles équivalentes à $\|\,.\,\|_\infty$?

Exercice 33 [03267] [Correction]
Soient l'espace $E = \left\{f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}) / f(0) = 0\right\}$ et N_1, N_2 les applications définies sur E par

$$N_1(f) = \|f'\|_\infty \text{ et } N_2(f) = \|f + f'\|_\infty$$

a) Montrer que N_1 et N_2 définissent des normes sur E.
b) Montrer que N_2 est dominée par N_1.
c) En exploitant l'identité

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_0^x (f(t) + f'(t))\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

montrer que N_1 est dominée par N_2.

Exercice 34 [00464] [Correction]
On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $f(0) = 0$. Pour $f \in E$, on pose

$$N_1(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| \text{ et } N_2(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) + f'(x)|$$

Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E et qu'elles sont équivalentes.

Exercice 35 [02411] [Correction]
Soit
$$E = \left\{f \in \mathcal{C}^2([0,\pi],\mathbb{R}) / f(0) = f'(0) = 0\right\}$$
a) Montrer que
$$N : f \mapsto \|f + f''\|_\infty$$
est une norme sur E.
b) Montrer que N est équivalente à
$$\nu : f \mapsto \|f\|_\infty + \|f''\|_\infty$$

Exercice 36 [03262] [Correction]
Soient $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et E^+ l'ensemble des fonctions de E qui sont positives et ne s'annulent qu'un nombre fini de fois. Pour toute fonction $\varphi \in E^+$ et pour toute fonction $f \in E$ on pose
$$\|f\|_\varphi = \sup_{t\in[0,1]} \{|f(t)|\,\varphi(t)\}$$
a) Montrer que $\|\,.\,\|_\varphi$ est une norme sur E
b) Montrer que si φ_1 et φ_2 sont deux applications strictement positives de E^+ alors les normes associées sont équivalentes.
c) Les normes $\|\,.\,\|_x$ et $\|\,.\,\|_{x^2}$ sont elles équivalentes ?

Exercice 37 [02767] [Correction]
Soient $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et E^+ l'ensemble des fonctions de E qui sont positives et ne s'annulent qu'un nombre fini de fois. Pour toute fonction $\varphi \in E^+$ et pour toute fonction $f \in E$ on pose
$$\|f\|_\varphi = \int_0^1 |f(t)|\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$
a) Montrer que $\|\,.\,\|_\varphi$ est une norme sur E
b) Montrer que si φ_1 et φ_2 sont deux applications strictement positives de E^+ alors les normes associées sont équivalentes.
c) Les normes $\|\,.\,\|_x$ et $\|\,.\,\|_{x^2}$ sont elles équivalentes ?

Equivalence de normes en dimension finie

Exercice 38 [00458] [Correction]
Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que
$$N(AB) \leqslant cN(A)N(B)$$

Exercice 39 [03146] [Correction]
Soient $n \in \mathbb{N}$ et E l'espace des polynômes réels de degrés inférieurs à n.
Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ vérifiant
$$\forall P \in E, \int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant \lambda \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$$

Exercice 40 [00474] [Correction]
Pour $d \in \mathbb{N}$, on pose $E = \mathbb{R}_d[X]$ l'espace des polynômes réels en l'indéterminée X de degrés inférieurs ou égaux à d.
a) Pour $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_d)$ famille de $d+1$ nombres réels distincts et $P \in E$, on pose
$$N_\xi(P) = \sum_{k=0}^d |P(\xi_k)|$$
Montrer que N_ξ définit une norme sur E.
b) Soit (P_n) une suite de polynômes éléments de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit
$$P_n = \sum_{k=0}^d a_{k,n} X^k$$
Etablir que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) la suite de fonctions (P_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$;
(ii) la suite de fonctions (P_n) converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$;
(iii) pour tout $k \in \{0, \ldots, d\}$, la suite $(a_{k,n})$ converge.

Exercice 41 [02768] [Correction]
Soit E un sous-espace vectoriel de dimension finie $d \geqslant 1$ de l'espace $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ de fonctions continues.
a) Etablir l'existence de $(a_1, \ldots, a_d) \in [0,1]^d$ tel que l'application
$$N : f \in E \mapsto \sum_{i=1}^d |f(a_i)|$$
soit une norme.
b) Soit (f_n) une suite de fonctions de E qui converge simplement vers une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.
Montrer que f est élément de E et que la convergence est uniforme.

Exercice 42 [01582] [Correction]
Montrer que si (P_n) est une suite de fonctions polynomiales de degré inférieur à N convergeant simplement vers une fonction f sur $\mathbb{R}$ alors f est une fonction polynomiale.

Exercice 43 [02409] [Correction]
a) Quelles sont les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'application

$$(x, y) \mapsto N_a(x, y) = \sqrt{x^2 + 2axy + y^2}$$

définit une norme sur $\mathbb{R}^2$.
b) Si N_a et N_b sont des normes, calculer

$$\inf_{(x,y)\neq 0} \frac{N_a(x,y)}{N_b(x,y)} \text{ et } \sup_{(x,y)\neq 0} \frac{N_a(x,y)}{N_b(x,y)}$$

Suites de vecteurs

Exercice 44 [03143] [Correction]
Soient $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On suppose

$$(AB)^n \to O_p$$

Montrer que

$$(BA)^n \to O_p$$

Exercice 45 [01670] [Correction]
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} P \text{ et } B^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} Q$$

On suppose que les matrices A et B commutent. Montrer que les matrices P et Q commutent.

Exercice 46 [00471] [Correction]
Soit (A_n) une suite de matrices inversibles de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
On suppose

$$A_n \to A \text{ et } A_n^{-1} \to B$$

Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 47 [00472] [Correction]
A quelle condition sur $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ existe-t-il $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $M^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} A$?

Exercice 48 [03010] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. On suppose que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers B.
Montrer que B est semblable à une matrice diagonale n'ayant que des 0 et des 1.

Exercice 49 [03022] [Correction]
a) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ diagonalisable vérifiant $\mathrm{Sp}(A) \subset \left]-1, 1\right[$. Montrer $A^n \to O_p$.
b) Même question avec trigonalisable au lieu de diagonalisable.

Exercice 50 [03036] [Correction]
Soit (A_n) une suite convergente d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et de limite A_∞.
Montrer que pour n assez grand

$$\mathrm{rg}(A_n) \geqslant \mathrm{rg}(A_\infty)$$

Exercice 51 [03475] [Correction]
Soit (A_k) une suite de matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ convergeant vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On suppose que les A_k sont tous de rang p donné. Montrer que $\mathrm{rg}A \leqslant p$.

Exercice 52 [03413] [Correction]
Soit $q \in \mathbb{N}^\star$. On note E_q l'ensemble des $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$A^q = I_n$$

a) Que dire de $A \in E_q$ telle que 1 est seule valeur propre de A ?
b) Montrer que I_n est un point isolé de E_q.

Exercice 53 [03851] [Correction]
Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n^n$ avec

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -a/n \\ a/n & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 54 [03925] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique telle que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Que dire de B ?

Séries de vecteurs

Exercice 55 [02728] [Correction]
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence de :
(i) toute valeur propre de M est de module strictement inférieur à 1 ;
(ii) la suite (M^k) tend vers 0 ;
(iii) la série de terme général M^k converge.

Exercice 56 [04052] [Correction]
Soient E un espace de dimension finie de norme $\|\,.\,\|$ et f une application de E vers E.
On dit que f est contractante si

$$\exists k \in [0,1[\,, \forall x, y \in E, \|f(y) - f(x)\| \leqslant k\,\|y - x\|$$

a) On suppose que f est contractante et l'on introduit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déterminée par

$$x_0 \in E \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$$

Montrer que la convergence de la série $\sum x_{n+1} - x_n$.
En déduire que f admet un unique point fixe.
b) Montrer que s'il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que f^p soit contractante alors f admet un unique point fixe.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
a) Soit $x \in E$. Si $x = 0$ alors $N_1(x) = N_2(x) = 0$. Sinon :
Posons $y = \frac{x}{N_1(x)}$. On a $y \in B_1 \subset B_2$ donc $N_2(y) \leqslant 1$ d'où $N_2(x) \leqslant N_1(x)$.
De manière symétrique $N_1(x) \leqslant N_2(x)$ puis l'égalité.
b) On reprend la démarche ci-dessus à partir de

$$y = \frac{x}{N_1(x) + \varepsilon}$$

avec $\varepsilon > 0$ pour obtenir $N_2(x) < N_1(x) + \varepsilon$ avant de faire tendre ε vers 0.

Exercice 2 : [énoncé]
a) Par réduction au même dénominateur

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} - \frac{1}{u+v} = \frac{av(u+v) + bu(u+v) - uv}{uv(u+v)}$$

qu'on peut réécrire

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} - \frac{1}{u+v} = \frac{(\sqrt{a}v - \sqrt{b}u)^2 + (a + b + 2\sqrt{ab} - 1)uv}{uv(u+v)}$$

et si $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$ alors

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} - \frac{1}{u+v} = \frac{(\sqrt{a}v - \sqrt{b}u)^2}{uv(u+v)} \geqslant 0$$

b)

$$N((f+g)^{-1}) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{f(t) + g(t)} \leqslant a \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} + b \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{g(t)} = aN(f^{-1}) + bN(g^{-1})$$

qui donne l'inégalité voulue avec

$$a = \frac{N(f)^2}{(N(f) + N(g))^2} \text{ et } b = \frac{N(g)^2}{(N(f) + N(g))^2}$$

qui sont tels que $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$.
c) Par l'inégalité triangulaire

$$N(f+g)N((f+g)^{-1}) \leqslant (N(f) + N(g))N((f+g)^{-1})$$

et en vertu de ce qui précède

$$N(f+g)N((f+g)^{-1}) \leqslant \frac{N(f)^2 N(f^{-1})}{N(f) + N(g)} + \frac{N(g)^2 N(g^{-1})}{N(f) + N(g)}$$

qui donne

$$N(f+g)N((f+g)^{-1}) \leqslant \frac{N(f)}{N(f) + N(g)} M + \frac{N(g)}{N(f) + N(g)} M = M$$

avec

$$M = \max(N(f)N(f^{-1}), N(g)N(g^{-1}))$$

Document3

Exercice 3 : [énoncé]
a) $x = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y)$ donc

$$\|x\| \leqslant \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$$

Aussi $\|y\| \leqslant \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$ donc

$$\|x\| + \|y\| \leqslant 2\max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$$

b) Sur $\mathbb{R}^2$ avec $\|\| = \|\|_\infty$, il y a égalité pour $x = (1,0)$ et $y = (0,1)$.
c) On a déjà

$$(\|x\| + \|y\|)^2 \leqslant 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Or $x = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y)$ donne

$$\|x\|^2 = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + 2\|x\|^2 - 2\|y\|^2\right)$$

aussi

$$\|y\|^2 = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 - 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\right)$$

donc

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 \leqslant \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right)$$

puis

$$(\|x\| + \|y\|)^2 \leqslant 2\max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}^2$$

qui permet de conclure.
d) Non, sur $\mathbb{R}^2$, il y a égalité pour $x = (1,0)$ et $y = (0,1)$.

Exercice 4 : [énoncé]
Cas $n = 2$
Par l'absurde supposons qu'une telle norme existe.
Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Les matrices A et B sont semblables (via $P = \mathrm{diag}(1/2, 1)$) donc $\|A\| = \|B\|$. Or $B = 2A$ donc $\|B\| = 2\|A\|$ puis $\|A\| = 0$.
C'est absurde car $A \neq O_2$.
Cas général : semblable.

Exercice 5 : [énoncé]
Ce sont les normes usuelles associées à la base canonique sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exercice 6 : [énoncé]
$\|\,.\,\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car c'est la norme 2 associée à la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On a

$$\|AB\|^2 = \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}\right)^2$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \sum_{\ell=1}^n b_{\ell,j}^2$$

donc

$$\|AB\|^2 \leqslant \sum_{i,k=1}^n a_{i,k}^2 \sum_{j,\ell=1}^n b_{\ell,j}^2 = \|A\|^2 \|B\|^2$$

puis

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \|B\|$$

Exercice 7 : [énoncé]
a) L'application $\|\,.\,\|$ est bien définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}^+$.
Si $\|A\| = 0$ alors

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n, \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = 0$$

et donc

$$\forall 1 \leqslant i,j \leqslant n, a_{i,j} = 0$$

ainsi la matrice A est nulle.
De plus

$$\|\lambda A\| = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^n |\lambda a_{i,j}| = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda| \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = |\lambda| \sup_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = |\lambda| \|A\|$$

et

$$\|A+B\| = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j} + b_{i,j}| \leqslant \sup_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| + |b_{i,j}|$$

donc

$$\|A+B\| \leqslant \sup_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| + \sup_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^n |b_{i,j}| = \|A\| + \|B\|$$

b) On a

$$\|AB\| = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^n \left|\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}\right| \leqslant \sup_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{i,k}b_{k,j}|$$

Or

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{i,k}b_{k,j}| \leqslant \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,k}| |b_{k,j}| = \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \sum_{j=1}^n |b_{k,j}| \leqslant \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \|B\| \leqslant \|A\| \|B\|$$

donc

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \|B\|$$

Exercice 8 : [énoncé]
a) L'application $\|\,.\,\|$ est bien définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}^+$.
Si $\|A\| = 0$ alors

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n, \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = 0$$

et donc

$$\forall 1 \leqslant i,j \leqslant n, a_{i,j} = 0$$

ainsi la matrice A est nulle.
De plus

$$\|\lambda A\| = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^n |\lambda a_{i,j}| = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda| \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = |\lambda| \sup_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = |\lambda| \|A\|$$

et

$$\|A+B\| = \sup_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^n |a_{i,j}+b_{i,j}| \leqslant \sup_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|+|b_{i,j}|$$

donc

$$\|A+B\| \leqslant \sup_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| + \sup_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^n |b_{i,j}| = \|A\|+\|B\|$$

Enfin

$$\|AB\| = \sup_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^n \left|\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}\right| \leqslant \sup_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n |a_{i,k}b_{k,j}|$$

Or

$$\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n |a_{i,k}b_{k,j}| \leqslant \sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n |a_{i,k}|\,|b_{k,j}| = \sum_{k=1}^n |a_{i,k}|\sum_{j=1}^n |b_{k,j}| \leqslant \sum_{k=1}^n |a_{i,k}|\,\|B\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$$

donc

$$\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$$

b) Soit $\lambda\in\mathrm{Sp}(A)$, il existe $X\neq 0$, $AX=\lambda X$.
En notant $x_1,\dots,x_n$ les éléments de la colonne X (non tous nuls) on a

$$\forall i\in\{1,\dots,n\}\,,\ \lambda x_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j$$

Considérons $i\in\{1,\dots,n\}$ tel que $|x_i| = \max_{1\leqslant j\leqslant n}|x_j| \neq 0$.
La relation précédente donne :

$$|\lambda|\,|x_i| \leqslant \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|\,|x_j| \leqslant \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|\,|x_i|$$

donc

$$|\lambda| \leqslant \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leqslant \|A\|$$

Exercice 9 : [énoncé]
a) L'inégalité vaut pour $a=0$ ou $b=0$. Pour $a,b>0$.
La fonction ln est concave :

$$\forall\lambda\in[0,1]\,,\ \forall x,y>0,\ \lambda\ln(x)+(1-\lambda)\ln(y)\leqslant\ln(\lambda x+(1-\lambda)y)$$

Appliquée à $x=a^p$, $y=b^q$ et $\lambda=1/p$ cela donne :

$$\frac{1}{p}\ln(a^p)+\frac{1}{q}\ln(b^q)\leqslant\ln\left(\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q\right)$$

puis

$$ab\leqslant\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q$$

b) On applique le résultat précédent à $a=\frac{|x_i|}{\|x\|_p}$ et $b=\frac{|y_i|}{\|y\|_q}$ pour obtenir

$$\frac{|x_iy_i|}{\|x\|_p\,\|y\|_q}\leqslant\frac{1}{p}\frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p}+\frac{1}{q}\frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}$$

En sommant pour $i\in\{1,\dots,n\}$, on obtient

$$\sum_{i=1}^n\frac{|x_iy_i|}{\|x\|_p\,\|y\|_q}\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

puis

$$\sum_{i=1}^n|x_iy_i|\leqslant\|x\|_p\,\|y\|_q$$

c) Par l'inégalité triangulaire

$$\|x+y\|_p^p=\sum_{i=1}^n|x_i+y_i|^p\leqslant\sum_{i=1}^n(|x_i|+|y_i|)^p$$

Or par l'identité proposée

$$\sum_{i=1}^n(|x_i|+|y_i|)^p\leqslant\sum_{i=1}^n|x_i|\,(|x_i|+|y_i|)^{p-1}+\sum_{i=1}^n|y_i|\,(|x_i|+|y_i|)^{p-1}$$

Par l'inégalité du b)

$$\sum_{i=1}^n(|x_i|+|y_i|)^p\leqslant\|x\|_p\left(\sum_{i=1}^n(|x_i|+|y_i|)^{(p-1)q}\right)^{1/q}+\|y\|_p\left(\sum_{i=1}^n(|x_i|+|y_i|)^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

donc

$$\sum_{i=1}^n(|x_i|+|y_i|)^p\leqslant\left(\|x\|_p+\|y\|_p\right)\left(\sum_{i=1}^n(|x_i|+|y_i|)^p\right)^{1/q}$$

car $(p-1)q=pq-q=p$

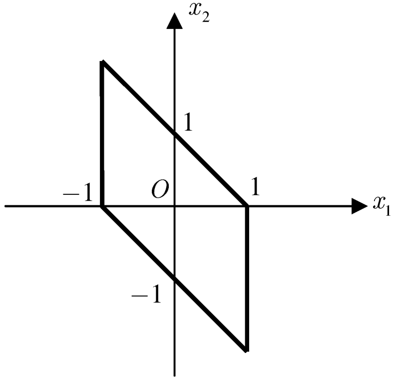
puis
$$\left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p\right)^{1/p}\leqslant \|x\|_p+\|y\|_p$$
car $1-1/q=1/p$ (et l'inégalité vaut que $\sum\limits_{i=1}^{n}(|x_i|^p+|y_i|^p)\neq 0$ ou non)
Finalement
$$\|x+y\|_p\leqslant \|x\|_p+\|y\|_p$$
d) Les propriétés $\|x\|_p=0\Rightarrow x=0$ et $\|\lambda x\|_p=|\lambda|\,\|x\|_p$ sont immédiates.

Exercice 10 : [énoncé]
Si $\|x\|_\infty=0$ alors $x=0$ et $\|x\|_p=0$ donc
$$\|x\|_\infty=\lim_{p\to+\infty}\|x\|_p$$
Si $\|x\|_\infty\neq 0$. Pour tout $p\geqslant 1$,
$$\|x\|_\infty\leqslant\|x\|_p\leqslant\left(n\,\|x\|_\infty^p\right)^{1/p}=n^{1/p}\,\|x\|_\infty\xrightarrow[p\to+\infty]{}\|x\|_\infty$$
donc
$$\lim_{p\to+\infty}\|x\|_p=\|x\|_\infty$$

Exercice 11 : [énoncé]
Notons $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
Si N est une norme alors
$$N(e_i)=a_i>0$$
Il est donc nécessaire que les $a_1,\dots,a_n$ soient tous strictement positifs pour que N soit une norme.
Inversement, supposons que les $a_1,\dots,a_n$ sont tous strictement positifs.
L'application N est alors à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
La relation $N(\lambda x)=|\lambda|\,N(x)$ est immédiate.
Puisque les a_i sont positifs, on a $N(x+y)\leqslant N(x)+N(y)$ car
$a_i\,|x_i+y_i|\leqslant a_i\,|x_i|+a_i\,|y_i|$.
Enfin, si $N(x)=0$ alors par nullité d'une somme de quantités positives
$$\forall i\in\{1,\dots,n\}\,,a_i\,|x_i|=0$$
donc
$$\forall i\in\{1,\dots,n\}\,,x_i=0$$
i.e. $x=0$

Exercice 12 : [énoncé]
L'application $N:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^+$ est bien définie car toute fonction continue sur le segment $[0,1]$ y est bornée
La liberté de la famille $(f_1,\dots,f_n)$ est une condition nécessaire car, sinon, une relation linéaire sur la famille $(f_1,\dots,f_n)$ détermine un n-uplet $(x_1,\dots,x_n)$ non nul tel que $N(x_1,\dots,x_n)=0$.
Inversement, supposons la famille $(f_1,\dots,f_n)$ libre.
Soient $\lambda\in\mathbb{R}$, $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ et $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$.
Si $N(x)=0$ alors $x_1f_1+\dots+x_nf_n=0$ et donc $(x_1,\dots,x_n)=(0,\dots,0)$ car $(f_1,\dots,f_n)$ libre.
$N(\lambda x)=\|\lambda x_1f_1+\dots+\lambda x_nf_n\|_\infty=\|\lambda\,(x_1f_1+\dots+x_nf_n)\|_\infty=|\lambda|\,N(x)$.
$N(x+y)=\|(x_1+y_1)f_1+\dots+(x_n+y_n)f_n\|_\infty=$
$\|(x_1f_1+\dots+x_nf_n)+(y_1f_1+\dots+y_nf_n)\|_\infty\leqslant N(x)+N(y)$.
Finalement N est une norme sur $\mathbb{R}^n$

Exercice 13 : [énoncé]
Quand t varie de 0 à 1, l'expression $|x_1+tx_2|$ varie de $|x_1|$ à $|x_1+x_2|$
Par suite, on peut exprimer plus simplement l'action de N :
$$N(x_1,x_2)=\max\{|x_1|\,,|x_1+x_2|\}$$
Soient $x=(x_1,x_2)$ et $y=(y_1,y_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
$$N(x+y)=\max\{|x_1+y_1|\,,|x_1+y_1+x_2+y_2|\}\leqslant\max\{|x_1|+|y_1|\,,|x_1+x_2|+|y_1+y_2|\}\leqslant$$
Pour $\lambda\in\mathbb{R}$,
$$N(\lambda.x)=\max\{|\lambda|\,|x_1|\,,|\lambda|\,|x_1+x_2|\}=|\lambda|\,N(x)$$
Enfin si $N(x)=0$ alors $|x_1|=|x_1+x_2|=0$ et donc $x_1=x_1+x_2=0$ puis $x=0$.
Ainsi N définie bien une norme sur $\mathbb{R}^2$.
Si $x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0$ alors $N(x)=x_1+x_2$.
Si $x_1\leqslant 0,x_2\geqslant 0$ alors $N(x)=\max(-x_1,|x_1+x_2|)$.
Si $x_1\geqslant 0,x_2\leqslant 0$ alors $N(x)=\max(x_1,|x_1+x_2|)$.
Si $x_1\leqslant 0,x_2\leqslant 0$ alors $N(x)=-(x_1+x_2)$.
Ces considérations permettent de représenter la boule unité fermée.



La boule unité fermée pour la norme N De manière immédiate : $N(x) \leqslant 2\|x\|_\infty$.
Aussi $|x_1| \leqslant 2N(x)$ et puisque $|x_2| \leqslant |x_1 + x_2| + |x_1|$ on a aussi $|x_2| \leqslant 2N(x)$.
On en déduit $\|x\|_\infty \leqslant 2N(x)$.

Exercice 14 : [énoncé]
$\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \subset \mathbb{K}^\mathbb{N}$ et $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
$(0)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{K})$.
Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $u, v \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$,

$$|(\lambda u + \mu v)_n| \leqslant |\lambda| |u_n| + |\mu| |v_n|$$

Par comparaison de séries à termes positifs

$$\lambda u + \mu v \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$$

$\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^\mathbb{N}$, c'est donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
L'application $\|\,.\,\|_1 : \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+$ est bien définie.
Soit $u \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Si $\|u\|_1 = 0$ alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n| = 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = 0$ et par suite $u = 0$.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$

$$\|\lambda u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda u_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda| |u_n| = |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = |\lambda| \|u\|_1$$

Soit $u, v \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$

$$\|u + v\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n + v_n| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} (|u_n| + |v_n|) = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| + \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n| = \|u\|_1 + \|v\|_1$$

Exercice 15 : [énoncé]
$L^1(I, \mathbb{K}) \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
$\tilde{0} \in L^1(I, \mathbb{K})$.
Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $f, g \in L^1(I, \mathbb{K})$.
Pour tout $t \in I$,

$$|(\lambda f + \mu g)(t)| \leqslant |\lambda| |f(t)| + |\mu| |g(t)|$$

donc par comparaison de fonctions positives $\lambda f + \mu g \in L^1(I, \mathbb{K})$.
Finalement $L^1(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et c'est donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
L'application $\|\,.\,\|_1 : L^1(I, \mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+$ est bien définie.
Soit $f \in L^1(I, \mathbb{K})$. Si $\|f\|_1 = 0$ alors $\int_I |f(t)| \,\mathrm{d}t = 0$ or $|f|$ est continue et positive sur I d'intérieur non vide donc $f = \tilde{0}$.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in L^1(I, \mathbb{K})$.

$$\|\lambda f\|_1 = \int_I |\lambda| |f(t)| \,\mathrm{d}t = |\lambda| \|f\|_1$$

Soient $f, g \in L^1(I, \mathbb{K})$

$$\|f + g\|_1 \leqslant \int_I |f(t)| + |g(t)| \,\mathrm{d}t = \|f\|_1 + \|g\|_1$$

$\|\,.\,\|_1$ définit bien une norme sur $L^1(I, \mathbb{K})$

Exercice 16 : [énoncé]
$L^2(I, \mathbb{K}) \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
$0 \in L^2(I, \mathbb{K})$.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in L^2(I, \mathbb{K})$. Pour tout $t \in I$.

$$|(\lambda f)(t)|^2 = |\lambda|^2 |f(t)|^2$$

donc par comparaison $\lambda f \in L^2(I, \mathbb{K})$.
Soit $f, g \in L^2(I, \mathbb{K})$. Pour tout $t \in I$

$$|(f+g)(t)|^2 \leqslant (|f(t)| + |g(t)|)^2 = |f(t)|^2 + 2|f(t)| |g(t)| + |g(t)|^2 \leqslant 2\left(|f(t)|^2 + |g(t)|^2\right)$$

car $2ab \leqslant a^2 + b^2$
Par comparaison de fonctions positives $f + g \in L^2(I, \mathbb{K})$.
Finalement $L^2(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et c'est donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
L'application $\|\,.\,\|_2 : L^2(I, \mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+$ est bien définie.

Soit $f \in L^2(I, \mathbb{K})$. Si $\|f\|_2 = 0$ alors $\int_I |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = 0$ or $|f|^2$ est continue et positive sur I d'intérieur non vide donc

$$\forall t \in I, |f(t)|^2 = 0$$

puis $f = \tilde{0}$.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in L^2(I, \mathbb{K})$.

$$\|\lambda f\|_2 = \left(\int_I |\lambda|^2 |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t\right)^2 = |\lambda| \|f\|_2$$

Soit $f, g \in L^2(I, \mathbb{K})$.

$$\|f+g\|_2^2 \leqslant \int_I (|f(t)| + |g(t)|)^2 \, \mathrm{d}t = \|f\|_2^2 + 2\int_I |f(t)| |g(t)| \, \mathrm{d}t + \|g\|_2^2$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux,

$$\left|\int_a^b f(t)g(t) \, \mathrm{d}t\right| \leqslant \left(\int_a^b f(t)^2 \, \mathrm{d}t\right)^{1/2} \left(\int_a^b g(t)^2 \, \mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

Ici

$$\int_a^b |f(t)| |g(t)| \, \mathrm{d}t \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t\right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(t)|^2 \, \mathrm{d}t\right)^{1/2} \leqslant \|f\|_2 \|g\|_2$$

Or pour $f : I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux intégrable

$$\forall [a, b] \subset I, \int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t \leqslant \int_I f$$

donc ici

$$\int_I |f(t)| |g(t)| \, \mathrm{d}t \leqslant \|f\|_2 \|g\|_2$$

et enfin

$$\|f+g\|_2^2 \leqslant (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 17 : [énoncé]
$\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
$0 \in \ell^2(\mathbb{K})$.
Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, $\lambda u \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.
Pour $u, v \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$,

$$|(u+v)_n|^2 \leqslant |u_n|^2 + 2|u_n| |v_n| + |v_n|^2 \leqslant 2\left(|u_n|^2 + |v_n|^2\right)$$

car $2ab \leqslant a^2 + b^2$.
Par comparaison de séries à termes positifs, $u + v \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.
$\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, c'est donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
L'application $\|\,.\,\|_2 : \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+$ est bien définie.
Soit $u \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Si $\|u\|_2 = 0$ alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 = 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n|^2 = 0$ puis $u = 0$.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$

$$\|\lambda u\| = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda u_n|^2} = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda|^2 |u_n|^2} = |\lambda| \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2} = |\lambda| \|u\|_2$$

Soit $u, v \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$

$$\|u+v\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n + v_n|^2 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 + 2\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| |v_n| + \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|^2$$

Or par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\sum_{n=0}^{N} |u_n| |v_n| \leqslant \sqrt{\sum_{n=0}^{N} |u_n|^2} \sqrt{\sum_{n=0}^{N} |v_n|}$$

En passant à la limite quand $N \to +\infty$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| |v_n| \leqslant \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2} \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|}$$

Ainsi

$$\|u+v\|_2^2 \leqslant (\|u\|_2 + \|v\|_2)^2$$

puis

$$\|u+v\|_2 \leqslant \|u\|_2 + \|v\|_2$$

Exercice 18 : [énoncé]
a) Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n, |(AX)_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\,|x_j| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$

et donc

$$\|AX\| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| = M$$

Ainsi, l'ensemble $\{\|AX\| / X \in S\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, elle admet une borne supérieure.
b) Si $X = 0$, c'est immédiat.
Si $X \neq 0$, on introduit $X' = X/\|X\| \in S$ et l'on exploite $\|AX'\| \leqslant N(A)$.
c) L'application N est bien définie à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ en vertu de ce qui précède.
Si $N(A) = 0$ alors pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $\|AX\| = 0$. En particulier, en prenant des colonnes X élémentaires, on obtient que chaque colonne de A est nulle.

$$N(\lambda A) = \sup_{X\in S} \|\lambda AX\| = \sup_{X\in S} |\lambda|\,\|AX\| = |\lambda| \sup_{X\in S} \|AX\| = |\lambda|$$

Enfin

$$N(A+B) = \sup_{X\in S} \|(A+B)X\| \leqslant \sup_{X\in S} \|AX + BX\| \leqslant \sup_{X\in S} \|AX\| + \sup_{X\in S} \|BX\| = N(A)+N(B)$$

Finalement, N définit bien une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
d) On a déjà vu

$$N(A) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$

Soit i_0 l'indice pour lequel

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|$$

Prenons ensuite $X = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$ avec $x_j = \pm 1$ de sorte que $a_{i_0,j}x_j = |a_{i_0,j}|$.
On a $X \in S$ et $\|AX\| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|$ donc

$$N(A) \geqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|$$

puis l'égalité voulue.

Exercice 19 : [énoncé]
Puisque $0 \in \mathcal{C}_0$, on a déjà

$$d(e, \mathcal{C}_0) \leqslant d(e, 0) = \|e\|_\infty = 1$$

Soit $x \in \mathcal{C}_0$. On a

$$|x_n - 1| \leqslant \|x - e\|_\infty$$

et donc quand $n \to +\infty$

$$1 \leqslant \|x - e\|_\infty$$

On en déduit

$$d(e, \mathcal{C}_0) \geqslant 1$$

et donc $d(e, \mathcal{C}_0) = 1$.

Exercice 20 : [énoncé]
Puisque $0 \in \mathcal{C}_0$, on a déjà

$$d(u, \mathcal{C}) \leqslant d(u, 0) = \|u\|_\infty = 1$$

Soit $x \in \mathcal{C}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. Pour $n = 2p$ pair

$$|x_{2p} - u_{2p}| \leqslant \|x - u\|_\infty$$

donne $|x_{2p} - 1| \leqslant \|x - u\|_\infty$ puis à la limite

$$|\ell - 1| \leqslant \|x - u\|_\infty$$

De même avec $n = 2p + 1$ impair on obtient

$$|\ell + 1| \leqslant \|x - u\|_\infty$$

On en duite

$$|1| = \left|\frac{1+\ell}{2} + \frac{1-\ell}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(|1+\ell| + |1-\ell|\right) \leqslant \|x - u\|_\infty$$

On en déduit

$$d(u, \mathcal{C}) \geqslant 1$$

et donc $d(u, \mathcal{C}) = 1$.

Exercice 21 : [énoncé]
Puisque $0 \in F$, $d(e,F) \leqslant d(e,0) = 1$.
En raisonnant par l'absurde montrons $d(e,F) = 1$ en supposant $d(e,F) < 1$.
Il existe alors une suite $x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\|\Delta x - e\|_\infty = \rho$ avec $\rho < 1$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|\Delta x(k) - 1| \leqslant \rho$ donc $\Delta x(k) \geqslant 1 - \rho$.
En sommant ces inégalités pour k allant de 0 à $n-1$, on obtient
$x(n) - x(0) \geqslant n(1-\rho)$ et donc $x \to +\infty$.
Ceci contredit $x \in \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et permet de conclure.

Exercice 22 : [énoncé]
Par définition
$$d(f,F) = \inf_{g \in F} \|f - g\|_\infty$$
Puisque la fonction nulle est continue
$$d(f,F) \leqslant \left\|f - \tilde{0}\right\|_\infty = 1$$
Inversement, soit $g \in F$.
Pour tout $x > 0$.
$$|f(x) - g(x)| = |1 - g(x)| \leqslant \|f - g\|_\infty$$
donc à la limite quand $x \to 0^+$
$$|1 - g(0)| \leqslant \|f - g\|_\infty$$
De même, pour $x < 0$,
$$|f(x) - g(x)| = |1 + g(x)| \leqslant \|f - g\|_\infty$$
et donc à la limite quand $x \to 0^-$
$$|1 + g(0)| \leqslant \|f - g\|_\infty$$
On en déduit
$$2 \leqslant |1 + g(0)| + |1 - g(0)| \leqslant 2\|f - g\|_\infty$$
et donc
$$1 \leqslant \|f - g\|_\infty$$
Finalement $1 \leqslant d(f,F)$ puis $d(f,F) = 1$.

Exercice 23 : [énoncé]
a)
$$\|f\|_1 \leqslant \int_0^1 \|f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$$
et
$$\|f\|_2 \leqslant \left(\int_0^1 \|f\|_\infty^2\right)^{1/2} \leqslant \|f\|_\infty$$
Posons $f_n(x) = x^n$, $\|f_n\|_\infty = 1$ alors que $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \to 0$ et
$\|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \to 0$. Les normes ne sont donc pas équivalentes.
b) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\int_0^1 1 \times |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_0^1 1\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_0^1 f(t)^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$
donc
$$\|f\|_1 \leqslant \|f\|_2$$
Pour $f_n(x) = \sqrt{2n+1}x^n$, $\|f_n\|_2 = 1$ et $\|f_n\|_1 = \frac{\sqrt{2n+1}}{n+1} \to 0$, les normes ne sont donc pas équivalentes.

Exercice 24 : [énoncé]
a) Sans difficultés.
b) On a $N_1(f) \leqslant N_2(f)$ car
$$|f(x)| \leqslant |f(0)| + \left|\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant |f(0)| + |x| \sup_{[-1,1]} |f'|$$
et sans difficultés on a aussi $N_3(f) \leqslant 2N_1(f)$.
Posons
$$f_n(x) = x^n$$
On a $N_1(f_n) = 1$, $N_2(f_n) = n$ et $N_3(f_n) = \frac{2}{n+1}$.
On en déduit que les normes N_1 et N_2 d'une part, N_1 et N_3 d'autre part, ne sont pas équivalentes.

Exercice 25 : [énoncé]
a) Les propriétés $N(f+g) \leqslant N(f) + N(g)$ et $N(\lambda f) = |\lambda|\,N(f)$ sont faciles.
Si $N(f) = 0$ alors la résolution de l'équation différentielle $f' + 3f = 0$ avec la condition initiale $f(0) = 0$ donne $f = 0$. Ainsi l'application N est bien une norme sur E.

On remarque

$$f(x) = \mathrm{e}^{-3x} \int_0^x \left(f(t)\mathrm{e}^{3t}\right)' \,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-3x} \int_0^x (3f(t) + f'(t))\mathrm{e}^{3t} \,\mathrm{d}t$$

Par suite $|f(x)| \leqslant \mathrm{e}^3 N(f)$ pour tout $x \in [0,1]$ et donc $N_\infty(f) \leqslant \alpha N(f)$ avec $\alpha = \mathrm{e}^3$.
b) Pour $f_n(x) = x^n$, $N_\infty(f) = 1$ et
$N(f) = N_\infty(x \mapsto 3x^n + nx^{n-1}) = n + 3 \to +\infty$.
Les normes N_∞ et N ne sont pas équivalentes.

Exercice 26 : [énoncé]
a) Posons $\varphi(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t$. φ est une forme bilinéaire symétrique, $\varphi(f,f) \geqslant 0$ et si $\varphi(f,f) = 0$ alors $f(0) = 0$ et pour tout $t \in [0,1]$, $f'(t) = 0$ donc $f = 0$. φ est donc un produit scalaire et N apparaît comme étant la norme associée.
b) Pour tout $x \in [0,1]$, $|f(x)| \leqslant |f(0)| + \left|\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{2}N(f)$, donc $\|f\|_\infty \leqslant \sqrt{2}N(f)$.Pour $f(x) = \sin(nx\pi)$, $\|f\|_\infty = 1$ et $N(f) = n\pi/\sqrt{2} \to +\infty$. Les deux normes ne sont donc pas équivalentes.

Exercice 27 : [énoncé]
a) $N_1, N_2 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$.
$N_1(P+Q) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0) + Q^{(k)}(0)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right| + \left|Q^{(k)}(0)\right| =$
$\sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right| + \sum_{k=0}^{+\infty} \left|Q^{(k)}(0)\right| = N_1(P) + N_1(Q)$,
$N_1(\lambda P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|\lambda P^{(k)}(0)\right| = |\lambda| \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right| = |\lambda|\, N_1(P)$,
$N_1(P) = 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, P^{(k)}(0) = 0$ or $P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$ donc $P = 0$.
Finalement N_1 est une norme.
$N_2(P+Q) = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t) + Q(t)| \leqslant \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)| + |Q(t)| \leqslant$
$\sup_{t\in[-1,1]} |P(t)| + \sup_{t\in[-1,1]} |Q(t)| = N_2(P) + N_2(Q)$,
$N_2(\lambda P) = \sup_{t\in[-1,1]} |\lambda P(t)| = \sup_{t\in[-1,1]} |\lambda|\,|P(t)| = |\lambda| \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)| = |\lambda|\, N_2(P)$,
$N_2(P) = 0 \Rightarrow \forall t \in [-1,1], P(t) = 0$ et par infinité de racines $P = 0$.
b) La suite $\frac{1}{n}X^n$ converge vers 0 pour N_2 mais n'est pas bornée et donc diverge pour N_1.
c) Les normes ne peuvent être équivalentes car sinon les suites convergeant pour l'une des normes convergerait pour l'autre.

Exercice 28 : [énoncé]
a) Aisément $\|\,.\,\|_\infty \leqslant \|\,.\,\|_1$
Soit u^N définie par $u_n^N = 1$ si $n < N$ et $u_n^N = 0$ sinon.
On a $\left\|u^N\right\|_1 = N$ et $\left\|u^N\right\|_\infty = 1$ donc il n'existe pas de $\alpha > 0$ tel que $\|\,.\,\|_1 \leqslant \alpha \|\,.\,\|_\infty$.
$\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.
b) En introduisant N tel que $n > N \Rightarrow u_n = 0$ on a

$$\|u\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 = \sum_{n=0}^{N} |u_n|^2 \leqslant \left(\sum_{n=0}^{N} |u_n|\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|\right)^2 = \|u\|_1^2$$

Ainsi $\|\,.\,\|_2 \leqslant \|\,.\,\|_1$.
Soit u^N définie par $u_n^N = 1$ si $n < N$ et $u_n^N = 0$ sinon.
On a $\left\|u^N\right\|_1 = N$ et $\left\|u^N\right\|_2 = \sqrt{N}$ donc il n'existe pas de $\alpha > 0$ tel que $\|\,.\,\|_1 \leqslant \alpha \|\,.\,\|_2$.
$\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_2$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 29 : [énoncé]
a) La suite u étant sommable, elle converge vers 0 et est par conséquent bornée.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$$

donc

$$\|u\|_\infty \leqslant \|u\|_1$$

Soit u^N définie par $u_n^N = 1$ si $n < N$ et $u_n^N = 0$ sinon. $u^N \in \ell^1(\mathbb{R})$.
On a $\left\|u^N\right\|_1 = N$ et $\left\|u^N\right\|_\infty = 1$ donc il n'existe pas de $\alpha > 0$ tel que $\|\,.\,\|_1 \leqslant \alpha \|\,.\,\|_\infty$.
$\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.
b) On a $\sum_{n=0}^{N} |u_n|^2 \leqslant \left(\sum_{n=0}^{N} |u_n|\right)^2$ donc quand $N \to +\infty$:

$$\|u\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 \leqslant \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|\right)^2 = \|u\|_1^2$$

Ainsi $\|\,.\,\|_2 \leqslant \|\,.\,\|_1$.
Soit u^N définie par $u_n^N = 1$ si $n < N$ et $u_n^N = 0$ sinon. $u^N \in \ell^1(\mathbb{R})$.
On a $\left\|u^N\right\|_1 = N$ et $\left\|u^N\right\|_2 = \sqrt{N}$ donc il n'existe pas de $\alpha > 0$ tel que $\|\,.\,\|_1 \leqslant \alpha \|\,.\,\|_2$.
$\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_2$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 30 : [énoncé]
a) Supposons que N_a est une norme sur $\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$.
Pour $m \in \mathbb{N}$, la suite élémentaire $e_m = (\delta_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle donc

$$N_a(e_m) = a_m > 0$$

De plus, pour la suite constante $u = (1)_{n\in\mathbb{N}}$, la quantité $N_a(u)$ existe et donc la série $\sum a_n$ converge.
Inversement, si $\sum a_n$ est une série convergente à termes strictement positifs alors on montre que l'application $N_a : \mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+$ est bien définie et que celle-ci est une norme sur l'espace $\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$.
b) On a aisément $N_a \leqslant k \left\|\,.\,\right\|_\infty$ avec $k = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.
Inversement, supposons $\left\|\,.\,\right\|_\infty \leqslant k' N_a$. Pour la suite élémentaire e_m, on obtient $\|e_m\|_\infty \leqslant k' N_a(e_m)$ et donc $a_m \geqslant 1/k$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Cette propriété est incompatible avec la convergence de la série $\sum a_n$.
Ainsi N_a est dominée par $\left\|\,.\,\right\|_\infty$ mais ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 31 : [énoncé]
a) N_∞ est bien connue pour être une norme sur l'ensemble des fonctions bornées, il en est de même sur l'ensemble des suites bornées dont le premier terme est nul.
L'application $N : E \to \mathbb{R}^+$ est bien définie. On vérifie aisément $N(u+v) \leqslant N(u) + N(v)$ et $N(\lambda u) = |\lambda|\, N(u)$. Si $N(u) = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$ et puisque $u_0 = 0$, on obtient $u = 0$. Ainsi N est une norme sur E.
b) Pour $u \in E$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant |u_{n+1}| + |u_n| \leqslant 2N_\infty(u)$$

On en déduit

$$N(u) \leqslant 2N_\infty(u)$$

La suite u définie par $u_0 = 0$ et $u_n = (-1)^n$ pour $n \geqslant 1$ est une suite non nulle pour laquelle il y a égalité.
c) Considérons la suite $u^{(p)}$ définie par

$$u^{(p)}(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \leqslant p \\ p & \text{sinon} \end{cases}$$

On a

$$u^{(p)} \in E,\ N_\infty(u^{(p)}) = p \text{ et } N(u^{(p)}) = 1$$

On en déduit que les normes N et N_∞ ne sont pas équivalentes car

$$\frac{N_\infty(u^{(p)})}{N(u^{(p)})} \to +\infty$$

Exercice 32 : [énoncé]
a) L'application N est bien définie sur E et valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
Si $N(f) = 0$ alors par nullité d'une somme de positifs $f(0) = 0$ et $\|f'\|_\infty = 0$ et donc f est constante égale à 0.
$N(\lambda f) = |\lambda f(0)| + \|\lambda f'\|_\infty = |\lambda|\,|f(0)| + |\lambda|\,\|f'\|_\infty = |\lambda|\,N(f)$.
$N(f+g) = |f(0)+g(0)| + \|f'+g'\|_\infty \leqslant |f(0)| + |g(0)| + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty = N(f) + N(g)$.
b) Aisément $N(f) \leqslant N'(f)$ car $|f(0)| \leqslant \|f\|_\infty$.
Pour tout $x \in [0,1]$,

$$|f(x)| = \left|f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant |f(0)| + \int_0^x \|f'\|_\infty \leqslant |f(0)| + x\,\|f'\|_\infty \leqslant N(f)$$

Par suite $\|f\|_\infty \leqslant N(f)$ puis sachant $\|f'\| \leqslant N(f)$ on a

$$N'(f) \leqslant 2N(f)$$

c) Pour $f_n(x) = x^n$.

$$\|f_n\|_\infty = 1 \text{ et } N(f_n) = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Donc N et $\left\|\,.\,\right\|_\infty$ ne sont pas équivalentes. A fortiori, N' n'est pas non plus équivalente à $\left\|\,.\,\right\|_\infty$.

Exercice 33 : [énoncé]
a) Les applications sont bien définies $N_i : E \to \mathbb{R}^+$ car toute fonction continue sur un segment y est bornée.
Les propriétés $N_i(f+g) \leqslant N_i(f) + N_i(g)$ et $N_i(\lambda f) = |\lambda|\,N_i(f)$ sont faciles.
Si $N_1(f) = 0$ alors $f' = 0$ et sachant $f(0) = 0$, on obtient $f = 0$.
Si $N_2(f) = 0$ alors la résolution de l'équation différentielle $f' + f = 0$ avec la condition initiale $f(0) = 0$ donne $f = 0$.
Ainsi les applications N_1, N_2 sont bien des normes sur E.
b) Pour $f \in E$, on a

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui permet d'établir $\|f\|_\infty \leqslant \|f'\|_\infty$.
Puisque

$$N_2(f) \leqslant \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leqslant 2N_1(f)$$

la norme N_2 est dominée par la norme N_1.

c) Sachant $f(0)=0$, on a

$$f(x)=\mathrm{e}^{-x}\int_0^x \left(f(t)\mathrm{e}^t\right)'\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-x}\int_0^x (f(t)+f'(t))\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

donc

$$|f(x)|\leqslant N_2(f)$$

Puisque

$$|f'(x)|\leqslant|f(x)+f'(x)|+|f(x)|$$

on obtient

$$|f'(x)|\leqslant 2N_2(f)$$

et finalement

$$N_1(f)\leqslant 2N_2(f)$$

Exercice 34 : [énoncé]
Pour tout $f,g\in E$ et tout $\lambda\in\mathbb{R}$, il est clair que $N_i(f+g)\leqslant N_i(f)+N_i(g)$ et que $N_i(\lambda f)=\lambda N_i(f)$.
Supposons $N_1(f)=0$, on a alors $\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|=0$ donc $f=0$.
Supposons maintenant que $N_2(f)=0$, on a alors $\sup_{x\in[0,1]}|f(x)+f'(x)|=0$ donc $f(x)+f'(x)=0$. Après résolution de l'équation différentielle sous-jacente, $f(x)=\lambda\mathrm{e}^{-x}$ avec $\lambda=f(0)=0$ et finalement $f=0$.
Finalement N_1 et N_2 sont bien deux normes sur E.
Il est clair que

$$N_2(f)\leqslant N_1(f)$$

Posons maintenant $M=N_2(f)$. Pour tout $x\in[0,1]$, on a

$$|f(x)+f'(x)|\leqslant M$$

donc

$$\left|(f(x)\mathrm{e}^x)'\right|\leqslant M\mathrm{e}^x$$

d'où

$$|f(x)\mathrm{e}^x|=\left|\int_0^x \left(f(t)\mathrm{e}^t\right)'\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^x M\mathrm{e}^t\mathrm{d}t\leqslant M\mathrm{e}x$$

puis $|f(x)|\leqslant M\mathrm{e}$ pour tout $x\in[0,1]$. Ainsi

$$\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|\leqslant M\mathrm{e}$$

De plus

$$|f'(x)|\leqslant|f(x)+f'(x)|+|f(x)|\leqslant M(1+\mathrm{e})$$

donc

$$\sup_{x\in[0,1]}|f'(x)|\leqslant M(1+\mathrm{e})$$

et finalement

$$N_1(f)\leqslant M(1+2\mathrm{e})=N_2(f)(1+2\mathrm{e})$$

On peut conclure que les deux normes sont effectivement équivalentes.

Exercice 35 : [énoncé]
a) L'application $N:E\to\mathbb{R}^+$ est bien définie et on vérifie aisément $N(\lambda f)=|\lambda|\,N(f)$ et $N(f+g)\leqslant N(f)+N(g)$.
Supposons maintenant $N(f)=0$, la fonction f est alors solution de l'équation différentielle $y''+y=0$ vérifiant les conditions initiales $y(0)=y'(0)=0$ ce qui entraîne $f=0$.
Finalement N est une norme sur E.
b) On a évidemment $N\leqslant\nu$.
Inversement, soit $f\in E$ et $g=f+f''$. La fonction f est solution de l'équation différentielle

$$y''+y=g$$

vérifiant les conditions initiales $y(0)=y'(0)=0$. Après résolution via la méthode de variation des constantes, on obtient

$$f(x)=\int_0^x\sin(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

On en déduit $|f(x)|\leqslant x\,\|g\|_\infty\leqslant\pi\,\|g\|_\infty$ et donc $\|f\|_\infty\leqslant\pi N(f)$.
De plus $\|f''\|_\infty\leqslant\|f+f''\|_\infty+\|f\|_\infty$ donc $\nu(f)\leqslant(\pi+1)N(f)$.

Exercice 36 : [énoncé]
a) $\|\,.\,\|_\varphi:E\to\mathbb{R}^+$ est bien définie.
Si $\|f\|_\varphi=0$ alors la fonction $t\mapsto|f(t)|\,\varphi(t)$ est nulle. En dehors des valeurs où φ est nulle, la fonction f s'annule. Or φ ne s'annule qu'un nombre fini de fois, donc par un argument de continuité, f s'annule aussi en ces points et finalement $f=\tilde{0}$.
Les propriétés $\|\lambda f\|_\varphi=|\lambda|\,\|f\|_\varphi$ et $\|f+g\|_\varphi\leqslant\|f\|_\varphi+\|g\|_\varphi$ sont immédiates.
b) Considérons la fonction φ_2/φ_1. Cette fonction est définie et continue sur le segment $[0,1]$, elle y est donc bornée et il existe $M\in\mathbb{R}^+$ vérifiant $\forall x\in[0,1]\,,\varphi_2(x)\leqslant M\varphi_1(x)$. On en déduit $\|\,.\,\|_{\varphi_1}\leqslant M\,\|\,.\,\|_{\varphi_2}$. Ainsi $\|\,.\,\|_{\varphi_1}$ est dominée par $\|\,.\,\|_{\varphi_2}$ et par un argument symétrique $\|\,.\,\|_{\varphi_2}$ est dominée par $\|\,.\,\|_{\varphi_1}$.

c) On a facilement $\|\,.\,\|_{x^2} \leqslant \|\,.\,\|_x$.
Pour $f_n(x) = (1-x)^n$, on a après étude des variations des fonction $x \mapsto x(1-x)^n$ et $x \mapsto x^2(1-x)^n$

$$\|f_n\|_x = \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \sim \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n}$$

et

$$\|f_n\|_{x^2} = \left(\frac{2}{n+2}\right)^2\left(1 - \frac{2}{n+2}\right)^n \sim \frac{\mathrm{e}^{-2}}{n^2}$$

donc il n'existe pas de constante $M \geqslant 0$ telle que $\|\,.\,\|_x \leqslant M\,\|\,.\,\|_{x^2}$. Les deux normes $\|\,.\,\|_x$ et $\|\,.\,\|_{x^2}$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 37 : [énoncé]
a) L'application $\|\,.\,\|_\varphi : E \to \mathbb{R}^+$ est bien définie.
Si $\|f\|_\varphi = 0$ alors par nullité de l'intégrale d'une fonction continue et positive, la fonction $t \mapsto |f(t)|\,\varphi(t)$ est nulle. En dehors des valeurs où φ est nulle, la fonction f s'annule. Or φ ne s'annule qu'un nombre fini de fois, donc par un argument de continuité, f s'annule aussi en ces points et finalement $f = \tilde{0}$.
Les propriétés $\|\lambda f\|_\varphi = |\lambda|\,\|f\|_\varphi$ et $\|f+g\|_\varphi \leqslant \|f\|_\varphi + \|g\|_\varphi$ sont immédiates.
b) Considérons la fonction φ_2/φ_1. Cette fonction est définie et continue sur le segment $[0,1]$, elle y est donc bornée et il existe $M \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall x \in [0,1]\,, \varphi_2(x) \leqslant M\varphi_1(x)$$

On en déduit

$$\forall f \in E, \int_0^1 |f(t)|\,\varphi_1(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M\int_0^1 |f(t)|\,\varphi_2(t)\,\mathrm{d}t$$

Autrement dit $\|\,.\,\|_{\varphi_1} \leqslant M\,\|\,.\,\|_{\varphi_2}$. La norme $\|\,.\,\|_{\varphi_1}$ est dominée par $\|\,.\,\|_{\varphi_2}$ et, par un argument symétrique, $\|\,.\,\|_{\varphi_2}$ est dominée par $\|\,.\,\|_{\varphi_1}$.
c) On vérifie facilement $\|\,.\,\|_{x^2} \leqslant \|\,.\,\|_x$ car

$$\forall t \in [0,1]\,, t^2 \leqslant t$$

Pour $f_n(x) = (1-x)^n$, on a

$$\|f_n\|_x = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

et

$$\|f_n\|_{x^2} = \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

donc il n'existe pas de constante $M \geqslant 0$ telle que $\|\,.\,\|_x \leqslant M\,\|\,.\,\|_{x^2}$.
Les deux normes $\|\,.\,\|_x$ et $\|\,.\,\|_{x^2}$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 38 : [énoncé]
On sait $N_\infty(AB) \leqslant nN_\infty(A)N_\infty(B)$ et $\alpha N \leqslant N_\infty \leqslant \beta N$ avec $\alpha, \beta > 0$ donc

$$N(AB) \leqslant \frac{1}{\alpha}N_\infty(AB) \leqslant \frac{n}{\alpha}N_\infty(A)N_\infty(B) \leqslant \frac{n\beta^2}{\alpha}N(A)N(B)$$

Exercice 39 : [énoncé]
Les applications

$$N_1 : P \mapsto \int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t \text{ et } N_2 : P \mapsto \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$$

définissent deux normes sur l'espace E. Puisque l'espace E est de dimension finie, ces deux normes sont équivalentes et en particulier N_2 est dominée par N_1

Exercice 40 : [énoncé]
a) facile.
b) (i)⇒(ii) Supposons que la suite (P_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une certaine fonction f. On ne sait pas a priori si cette fonction est, ou non, polynomiale.
Soit $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_d)$ une famille de $d+1$ réels distincts et $P \in E$ déterminé par $P(\xi_k) = f(\xi_k)$. On peut affirmer que la (P_n) suite converge vers P pour la norme N_ξ. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ avec $a < b$. $N = \|\,.\,\|_{\infty,[a,b]}$ définit une norme sur E qui est équivalent à N_ξ car E est de dimension finie. Puisque (P_n) converge vers P pour la norme N_ξ, on peut affirmer que la convergence a aussi lieu pour la norme N et donc (P_n) converge uniformément vers P sur le segment $[a,b]$. Au passage, on en déduit que $f = P$.
(ii)⇒(iii) Si la suite (P_n) converge uniformément sur tout segment vers une fonction f, elle converge aussi simplement vers f et l'étude ci-dessus montre que f est un polynôme. En introduisant la norme infinie relative aux coefficients polynomiaux :

$$\left\|a_0 + \cdots + a_dX^d\right\|_\infty = \max_{0\leqslant k\leqslant d} |a_k|$$

l'équivalence de norme permet d'établir que les coefficients de P_n convergent vers les coefficients respectifs de f.
(iii)⇒(i) immédiat.

Exercice 41 : [énoncé]
a) L'application $N : E \to \mathbb{R}^+$ proposée vérifie aisément

$$N(\lambda f) = |\lambda|\,N(f) \text{ et } N(f+g) \leqslant N(f) + N(g)$$

Le problème est l'obtention de l'implication de séparation

$$N(f) = 0 \Rightarrow f = 0$$

Procédons par récurrence sur $d \in \mathbb{N}^\star$.
Cas $d = 1$: $E = \mathrm{Vect}(g)$ avec $g \neq \tilde{0}$. Un réel $a_1 \in [0,1]$ tel que $g(a_1) \neq 0$ convient.
Supposons la propriété au rang $d \geqslant 1$.
Soit E un sous-espace vectoriel de dimension $d+1$ de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Il existe une fonction g non nulle élément de E et il existe $a_{d+1} \in [0,1]$ tel que $g(a_{d+1}) \neq 0$.
Considérons alors $H = \{f \in E / f(a_{d+1}) = 0\}$. On vérifie aisément $E = H \oplus \mathrm{Vect} g$.
Puisque H est alors de dimension d, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour introduire $(a_1, \dots, a_d) \in [0,1]^d$ tel que $h \mapsto \sum\limits_{i=1}^{d} |h(a_i)|$ soit une norme sur$H$.
Considérons alors l'application

$$N : f \in E \mapsto \sum_{i=1}^{d+1} |f(a_i)|$$

et montrons

$$N(f) = 0 \Rightarrow f = 0$$

Supposons $N(f) = 0$ et donc $|f(a_1)| = \ldots = |f(a_d)| = |f(a_{d+1})| = 0$. Puisque $E = H \oplus \mathrm{Vect} g$, on peut écrire $f = h + \lambda g$ avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. La propriété $|f(a_{d+1})| = 0$ entraîne $\lambda = 0$ et la propriété $|f(a_1)| = \ldots = |f(a_d)| = 0$ entraîne alors $h = 0$. On peut donc conclure $f = 0$.
Récurrence établie.
b) Introduisons $E' = E + \mathrm{Vect} f$ de dimension d ou $d+1$. Sur E', on peut introduire une norme du type précédent et l'hypothèse de convergence simple donne alors que (f_n) tend vers f pour la norme considérée. Or sur E' de dimension finie toutes les normes sont équivalentes et donc (f_n) tend aussi vers f pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$ ce qui signifie que (f_n) converge uniformément vers f.
Il reste à montrer que $f \in E$. Par l'absurde, supposons que $f \notin E$. On a alors $E' = E \oplus \mathrm{Vect} f$. Considérons alors la projection p sur $\mathrm{Vect} f$ parallèlement à E. C'est une application linéaire au départ d'un espace de dimension finie, elle est donc continue. Or $p(f_n) = 0 \to 0$ et $p(f_n) \to p(f) = f \neq 0$. C'est absurde.

Exercice 42 : [énoncé]
Soient $a_0, \dots, a_N$ des réels deux à deux distincts. Considérons la fonction polynôme P de degré inférieur à N vérifiant

$$\forall k \in \{0, \dots, N\}, P(a_k) = f(a_k)$$

Sur l'espace $\mathbb{R}_N[X]$, on peut introduire la norme donnée par

$$N(Q) = \max_{0 \leqslant k \leqslant N} |Q(a_k)|$$

Pour cette norme, on peut affirmer que la suite (P_n) converge vers P. Or l'espace $\mathbb{R}_N[X]$ est de dimension finie, toutes les normes y sont donc équivalentes. La convergence de (P_n) vers P a donc aussi lieu pour les normes données par

$$\|Q\|_{\infty,[a,b]} = \sup_{t \in [a,b]} |Q(t)|$$

La suite (P_n) converge vers P sur tout segment de $\mathbb{R}$ et donc converge simplement vers P. Par unicité de la limite simple, la fonction f est égale à P.

Exercice 43 : [énoncé]
a) $N_a(1,1)$ et $N_a(1,-1)$ doivent exister et être strictement positifs. Cela fournit les conditions nécessaires $2a + 2 > 0$ et $2 - 2a > 0$ d'où $a \in \left]-1,1\right[$. Montrons que cette condition est suffisante.
Supposons $a \in \left]-1,1\right[$ et considérons $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi((x,y),(x',y')) = xx' + yy' + axy' + ayx'$.
L'application φ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$ et pour $(x,y) \neq (0,0)$, $\varphi((x,y),(x,y)) \geqslant (1-|a|)(x^2+y^2) > 0$ en vertu de $|2axy| \leqslant |a|\left(x^2+y^2\right)$. Ainsi φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ et N_a est la norme euclidienne associée.
b) Le cas $a = b$ est immédiat. Quitte à échanger, on peut désormais supposer $a < b$.
Par homogénéité, on peut limiter l'étude de $\frac{N_a(x,y)}{N_b(x,y)}$ au couple $(x,y) = (\cos t, \sin t)$ avec $t \in \left]-\pi/2, \pi/2\right]$.
Posons

$$f(t) = \left(\frac{N_a(\cos t, \sin t)}{N_b(\cos t, \sin t)}\right)^2 = \frac{1 + a\sin 2t}{1 + b\sin 2t}$$

On a

$$f'(t) = 2\frac{(a-b)\cos(2t)}{(1 + b\sin 2t)^2}$$

Les variations de f sont faciles et les extremums de $f(t)$ sont en $t = -\pi/4$ et $t = \pi/4$. Ils valent $\frac{1-a}{1-b}$ et $\frac{1+a}{1+b}$.
On en déduit

$$\inf_{(x,y)\neq 0} \frac{N_a(x,y)}{N_b(x,y)} = \sqrt{\frac{1+a}{1+b}}$$

et

$$\sup_{(x,y)\neq 0} \frac{N_a(x,y)}{N_b(x,y)} = \sqrt{\frac{1-a}{1-b}}$$

(dans le cas $a < b$).

Exercice 44 : [énoncé]
Il suffit d'observer
$$(BA)^{n+1} = B(AB)^n A \to O_p$$

Exercice 45 : [énoncé]
Puisque les matrices A et B commutent, il en est de même des matrices A^k et B^k.
En passant à la limite la relation
$$A^k B^k = B^k A^k$$
on obtient
$$PQ = QP$$

Exercice 46 : [énoncé]
On a
$$A_n A_n^{-1} = I_p$$
En passant cette relation à la limite on obtient
$$AB = I_p$$
Par le théorème d'inversibilité, on peut affirmer que A est inversible et
$$A^{-1} = B$$

Exercice 47 : [énoncé]
Si A est limite d'une suite (M^n) alors $M^{2n} \to A$ et $M^{2n} = (M^n)^2 \to A^2$.
Par unicité de la limite, on obtient $A^2 = A$.
Inversement, si $A^2 = A$ alors $A = \lim\limits_{n\to+\infty} M^n$ avec $M = A$.

Exercice 48 : [énoncé]
$A^{2n} \to B$ et $A^{2n} = A^n \times A^n \to B^2$ donc $B = B^2$ et B est une matrice de projection.

Exercice 49 : [énoncé]
a) Il existe $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ tel que $P^{-1}AP = D$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ et $|\lambda_j| < 1$.
On a alors $A^n = PD^nP^{-1}$ avec $D^n = \mathrm{diag}(\lambda_1^n, \dots, \lambda_p^n) \to O_p$ donc $A^n \to PO_pP^{-1} = O_p$.
b) En reprenant la démarche qui précède, on peut conclure dès que l'on établit que si T est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux dans $]-1,1[$ alors $T^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} O_p$.
Raisonnons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^\star$.
Pour $p = 1$, la propriété est immédiate.
Supposons le résultat vrai au rang $p \geqslant 1$.
Soit $T \in \mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à coefficients diagonaux dans $]-1,1[$.
On peut écrire
$$T = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ O_{n,1} & S \end{pmatrix}$$
avec $|\lambda| < 1$ et $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à coefficients diagonaux dans $]-1,1[$.
Par le calcul, on obtient
$$T^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & L_n \\ O_{n,1} & S^n \end{pmatrix}$$
avec
$$L_n = L \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k S^{n-1-k}$$
On a $\lambda^n \to 0$ et $S^n \to O_n$ par hypothèse de récurrence.
Pour conclure, il suffit de montrer que
$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k S^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-1-k} S^k \to O_n$$
car ceci entraîne $L_n \to O_{1,n}$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Puisque $S^n \to O_n$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ au-delà duquel $\|S^n\| \leqslant \varepsilon$.
On alors
$$\left\| \sum_{k=N}^{n-1} \lambda^{n-1-k} S^k \right\| \leqslant \varepsilon \sum_{k=N}^{n-1} |\lambda|^{n-1-k} \leqslant \frac{\varepsilon}{1-|\lambda|}$$
De plus, puisque $\sum\limits_{k=0}^{N-1} \lambda^{n-1-k} S^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} O_n$ car somme d'un nombre constant de termes de limites nulles, on peut affirmer que pour n assez grand, on a
$$\left\| \sum_{k=0}^{N-1} \lambda^{n-1-k} S^k \right\| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi, pour n assez grand

$$\left\|\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^{n-1-k}S^k\right\|\leqslant\varepsilon+\frac{\varepsilon}{1-|\lambda|}$$

et on peut conclure.
Récurrence établie.

Exercice 50 : [énoncé]
Posons $r=\mathrm{rg}A_\infty$.
La matrice A_∞ possède est déterminant extrait non nul de taille r.
Le déterminant extrait correspondant des matrices A_n est alors non nul à partir d'un certain rang et donc $\mathrm{rg}(A_n)\geqslant r$

Exercice 51 : [énoncé]
Posons $r=\mathrm{rg}A$.
La matrice A possède un déterminant extrait non nul de taille r.
Le déterminant extrait correspondant des matrices A_k est alors non nul à partir d'un certain rang et donc
$p=\mathrm{rg}(A_k)\geqslant r=\mathrm{rg}A$

Exercice 52 : [énoncé]
a) Une matrice $A\in E_q$ annule le polynôme scindé simple X^q-1, elle est donc diagonalisable. Si 1 est sa seule valeur propre alors $A=I_n$ car semblable à I_n.
b) Par l'absurde, supposons qu'il existe une suite (A_p) d'éléments de $E_q\setminus\{I_n\}$ vérifiant

$$A_p\to I_n$$

Par continuité de la trace

$$\mathrm{tr}A_p\to n$$

Or la trace de A_p est la somme de ses valeurs propres, celles-ci ne sont pas toutes égales à 1 et sont racines $q$ème de l'unité donc

$$\mathrm{Re}(\mathrm{tr}A_p)\leqslant(n-1)+\cos\frac{2\pi}{q}$$

Cette majoration est incompatible avec la propriété $\mathrm{tr}A_p\to n$.

Exercice 53 : [énoncé]
On peut écrire

$$1=\sqrt{1+(a/n)^2}\cos(\theta_n)\text{ et }a/n=\sqrt{1+(a/n)^2}\sin(\theta_n)$$

avec

$$\theta_n=\arcsin\left(a/n\right)$$

On a alors $A_n=\sqrt{1+(a/n)^2}R(\theta_n)$ avec $R(\theta_n)$ la matrice de rotation

$$R(\theta_n)=\begin{pmatrix}\cos\theta_n&-\sin\theta_n\\\sin\theta_n&\cos\theta_n\end{pmatrix}$$

Par suite

$$A_n^n=\left(1+\left(\frac{a}{n}\right)^2\right)^{n/2}\begin{pmatrix}\cos(n\theta_n)&-\sin(n\theta_n)\\\sin(n\theta_n)&\cos(n\theta_n)\end{pmatrix}$$

Or

$$\left(1+\left(\frac{a}{n}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}}\to1\text{ et }n\theta_n\to a$$

donc

$$A_n^n\to\begin{pmatrix}\cos a&-\sin a\\\sin a&\cos a\end{pmatrix}$$

Exercice 54 : [énoncé]
D'une part

$$^t(A^k)\to{}^tB$$

et d'autre part

$$^t(A^k)=(-1)^kA^k$$

de sorte que

$$^t(A^{2p})=(-1)^{2p}A^{2p}\to B$$

et

$$^t(A^{2p+1})=(-1)^{2p+1}A^{2p+1}\to-B$$

Par unicité de la limite, on obtient

$$B={}^tB=-B$$

On en déduit que la matrice B est nulle.

Exercice 55 : [énoncé]
(i)⇒(ii) Le plus simple est sans doute d'utiliser la décomposition de Dunford :
$M = D + N$ avec D diagonalisable et N nilpotente commutant entre elles. Par la formule du binôme de Newton, on peut calculer M^k et tronquer la somme par la nilpotence de N, on parvient alors à une somme finie de termes qui tendent vers 0 par croissance comparée. Une autre méthode, techniquement plus lourde, consiste à introduire $\rho_\ell^k = \max\left\{\left|(M^k)_{1,\ell+1}\right|, \ldots, \left|(M^k)_{n-\ell,n}\right|\right\}$ qui majorent les coefficients de M^k situés sur la diagonale (pour $\ell = 0$), sur la sur-diagonale (pour $\ell = 1$) etc. En notant que $\rho = \rho_0^1 < 1$, on montre par récurrence sur k que
$\rho_\ell^k \leqslant k^\ell \|M\|_\infty^{\ell+1} \rho^{k-\ell}$ ce qui permet de conclure.
(ii)⇒(iii) Supposons que $M^k \to 0$. On peut alors affirmer que 1 n'est pas valeur propre de M car $MX = X \Rightarrow M^k X = X$ et donc à la limite $MX = X \Rightarrow X = 0$.
Par suite la matrice $I - M$ est inversible et puisque $(I-M)\sum_{k=0}^{m} M^k = I - M^{m+1}$,
$\sum_{k=0}^{m} M^k = (I-M)^{-1}(I - M^{m+1})$ d'où la convergence de la série des M^k.
(iii)⇒(i) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ et $X \neq 0$ tel que $MX = \lambda X$. Puisque $\sum_{k=0}^{m} M^k$ converge quand $\mathrm{rg}C \geqslant r$, on a $\sum_{k=0}^{m} M^k X$ converge, puis $\sum_{k=0}^{n} \lambda^k X$ converge et donc $|\lambda| < 1$ (car $X \neq 0$).

Exercice 56 : [énoncé]
a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant k\,\|x_n - x_{n-1}\| \leqslant \ldots \leqslant k^n\,\|x_1 - x_0\|$$

Puisque $k \in [0,1[$, la série numérique $\sum k^n$ converge et par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \|x_{n+1} - x_n\|$ converge. La série télescopique
$\sum x_{n+1} - x_n$ est donc absolument convergente et donc convergente car l'espace E est de dimension finie. Ainsi, la suite (x_n) converge.
Existence : Introduisons x_∞ la limite de la suite (x_n).
On a

$$\|x_{n+1} - f(x_\infty)\| = \|f(x_n) - f(x_\infty)\| \leqslant k\,\|x_n - x_\infty\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et donc (x_n) tend aussi vers $f(x_\infty)$. Par unicité de la limite, on obtient
$f(x_\infty) = x_\infty$.
Unicité : Si x, y sont points fixes de f alors

$$\|y - x\| = \|f(y) - f(x)\| \leqslant k\,\|y - x\| \text{ avec } k \in [0,1[$$

entraîne $x = y$ et donc f possède au plus un point fixe.
b) Si a est point fixe de f alors a est point fixe de f^p et donc a est unique.
Inversement, soit a un point fixe de f^p.
On a $f^p(a) = a$ donc $f^{p+1}(a) = f(a)$ ce qui donne $f^p(f(a)) = f(a)$.
Or le point fixe de f^p est unique donc $f(a) = a$ et a est point fixe de f.